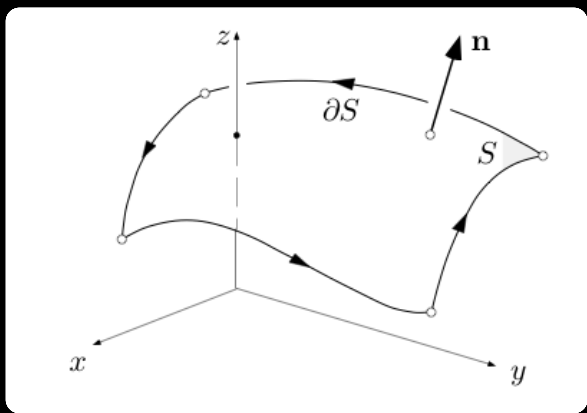
Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

- Satz von Stokes

Satz von Stokes:

Der Randzyklus einer orientierten Fläche:



Betrachten eine Fläche S mit der Parametrisierung

$$S: \quad B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto r(u,v)$$

wobei der Parameterbereich B die Vorraussetzungen für den Satz von Green erfüllen. B braucht aber nicht zusammenhängend zu sein (siehe unten).

Randzyklus von B: Randzyklus von S:

$$\gamma: t \mapsto (u(t), v(t)) \xrightarrow{r} r(\gamma): t \mapsto r(u(t), v(t))$$

$$(a \leq t \leq b) \qquad\qquad (a \leq t \leq b)$$

Bem: Dies sind Vorbereitungen für den unten folgenden Beweis.

In der Folge besitzt der Randzyklus

$$\partial B = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

des Parameterbereiches B einen wohlbestimmten Bildzyklus

$$\partial S = r(\partial B)$$

Das kann dann wie folgt aussehen:

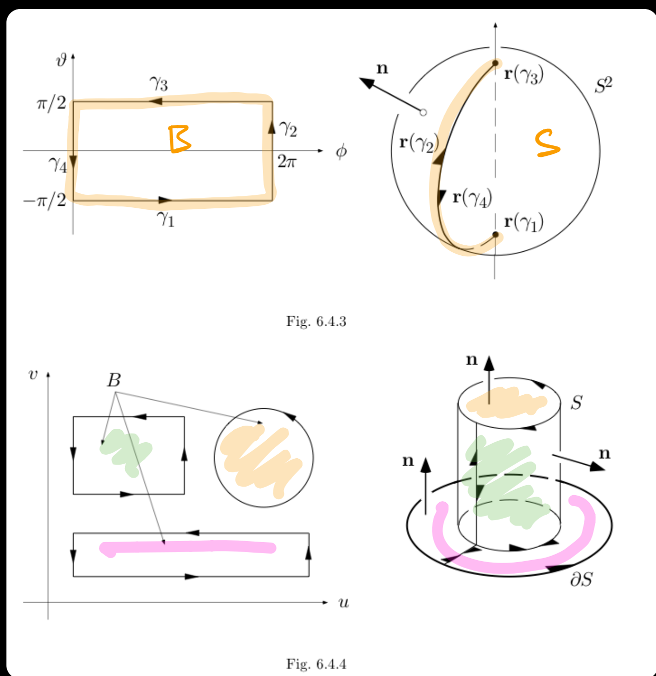


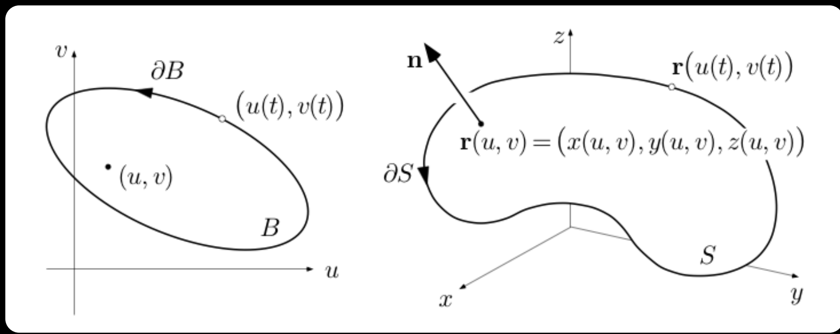
Fig. 6.4.3

Fig. 6.4.4

Bem: Es kann durchaus vorkommen, dass die Parameterdarstellung gewisse γ_i einzeln oder in Paaren annihiliert.

Die Richtung des Randzyklus ist immer noch gleich definiert wie beim Satz von Green.
Wichtig: Hierfür muss die Oberfläche jetzt orientiert sein! → Es muss eine positive Richtung für den Normalvektor gewählt sein.

Von der Greenschen Formel zum Satz von Stokes:



Es sei $K = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$ ein C^1-Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und S eine in Ω liegende Fläche (2-Kette).

Randzyklen:

$\partial B: \; t \mapsto (u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$, $\quad \partial S: \; t \mapsto r(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$

Möchten die Zirkulation von K entlang von ∂S betrachten:

$$Z = \int_{\partial S} K \, dr = \int_a^b K(r(u(t), v(t))) \cdot \underbrace{\left(r_u(u(t), v(t)) \, \dot{u}(t) + r_v(u(t), v(t)) \, \dot{v}(t) \right)}_{\frac{d}{dt} r} dt$$

Wir können dieses Integral als Linienintegral längs ∂B interpretieren, und zwar für das Feld

$$K^* = \begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \end{bmatrix}, \quad P^*(u,v) = K(r(u,v)) \, r_u(u,v), \quad Q^*(u,v) = K(r(u,v)) \, r_v(u,v)$$

Bem: K^* ist der sogenannte Pullback von K

Wir haben also

$$Z = \int_{\partial B} (P^* du + Q^* dv) = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

Können nun den <u>Satz von Green</u> anwenden:

$$\Rightarrow \quad Z = \int_{B} H(u,v)\, dS$$

Bem: Berechnung von H im Blatter S.310
↳ mühsam aber blosse Umformung

$$\Rightarrow \quad H(u,v) = \operatorname{rot}(K(r(u,v))) \cdot (r_u \times r_v)$$

Daraus folgt:

$$Z = \int_{B} \operatorname{rot}(K(r(u,v))) \cdot (r_u(u,v) \times r_v(u,v))\, dS$$

$$= \int_{S} \operatorname{rot}(K) \cdot n \cdot dS$$

$\Rightarrow$

<u>Satz von Stokes:</u>

$$\boxed{\int_{\partial S} K\, ds = \int_{S} \operatorname{rot}(K) \cdot n \cdot dS}$$

Satz von Green als Spezialfall des Satzes von Stokes:

Betrachten für den 2D Fall einfach

$$K = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B} K\, ds \overset{\text{stokes}}{=} \int_B \operatorname{rot}(K)\cdot n \cdot dS = \int_B \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dS$$

$$= \int_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_x - P_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dS = \underline{\underline{\int_B Q_x - P_y \, dS}}$$

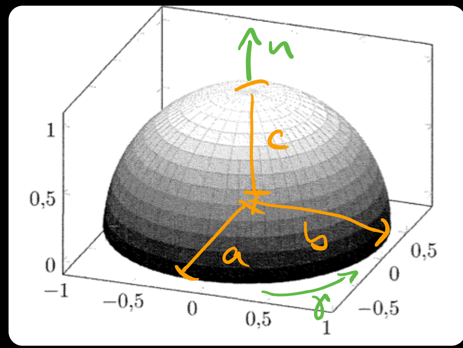
Gleich dem Satz von Green!

Integrabilitätsbedingung im $\mathbb{R}^3$:

Bleibt $\boxed{\operatorname{rot}(K) = 0}$

Bem: Hätten wir im 2D auch anders aufstellen können, haben uns aber dagegen entschieden und es gleich gemacht.

Beispiel: Wir betrachten das Vektorfeld $v = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$ und die obere Halbsphäre



$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

Alternativ: Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Berechne $\int_H \operatorname{rot}(v)\, n\, dS$, wobei n in z-Richtung zeigen soll.

Direkte Berechnung: $\operatorname{rot}(v) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1) Parametrisieren H: Kugelkoordinaten

$$r: [0, \tfrac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto r(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} a \sin\theta \cos\varphi \\ b \sin\theta \sin\varphi \\ c \cos\theta \end{bmatrix}$$

2) $r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$, $r_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$

↳ Würde auch das Flächenelement skalieren

3)

$$n \cdot dS = r_\theta \times r_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta \cos\varphi \\ \sin^2\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \sin\theta \end{bmatrix} d\theta\, d\varphi$$

4) $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: $\cos\theta \geq 0$, $\sin\theta \geq 0$ $\Rightarrow$ richtige Richtung

5)

$$\int_H \operatorname{rot}(v) n \cdot dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2\theta \cos\varphi \\ \sin^2\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \sin\theta \end{bmatrix} d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \underbrace{(\cos\varphi + \sin\varphi)}_{0} + \cos\theta \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\pi}}$$

↳ Nutzt solche Symmetrien von zu integrierenden Funktionen immer aus!

Mit dem Satz von Stokes:

$$\int_H \operatorname{rot}(v) \cdot n \, dS = \int_{\partial H} v \, ds$$

1) $\partial H : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \gamma(t) = \underline{\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

2) $\dot\gamma(t) = \underline{\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}}$, $ds = \dot\gamma(t) dt$

3) $$\int_{\partial H} v \, ds = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

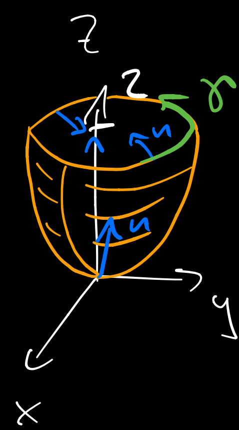
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2t)\, dt}_{0} = \underline{\underline{\pi}}$$

Aufgabe 11 Probeprüfung Willwacher:

Sei $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0\}$

$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$



$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{bmatrix}$$

und $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in M \mid x_3 \leq 2\} \subset M$.

Sei $\nu : G \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld. Berechne das Flussintegral

$$\int_G \langle \operatorname{rot}(f), \nu \rangle \, dS$$

Mit dem Satz von Stokes:

$$\int_G \operatorname{rot}(f) \nu \, dS = \int_{\partial G} f \, ds$$

1) $\partial G: \quad [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $\dot\gamma(t) = 2\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$

3) $\int_G \operatorname{rot} f \,\nu \, dS = \int_{\partial G} f \, ds = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 6\sin t \\ 4\cos t \\ 8\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{bmatrix} dt$

$$= \int_0^{2\pi} -12\sin^2 t + 8\cos^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -6 + \underbrace{6\cos(2t)}_{0} + 4 + \underbrace{4\cos(2t)}_{0} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -2 \, dt = -4\pi$$

Direkter Weg:

$$\int_G \langle \operatorname{rot}(f), \nu \rangle \, dS = \int_G \operatorname{rot} f \, \nu \cdot dS$$

1) G parametrisieren: Zylinderkoordinaten

$$r: [0,2\pi) \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$$
$$(\varphi, z) \mapsto r(\varphi,z) = \begin{bmatrix} \sqrt{2z}\cos\varphi \\ \sqrt{2z}\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

2)
$$n \cdot dS = r_\varphi \times r_z \, d\varphi \, dz = \begin{bmatrix} -\sqrt{2z}\sin\varphi \\ \sqrt{2z}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2z}}\cos\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2z}}\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2z}\cos\varphi \\ \sqrt{2z}\sin\varphi \\ -1 \end{bmatrix} d\varphi \, dz$$

3) Falsche Richtung!
$$n \cdot dS = \begin{bmatrix} -\sqrt{2z}\cos\varphi \\ -\sqrt{2z}\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} d\varphi \, dz$$

4)
$$\int_G \operatorname{rot} f \, \nu \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \begin{bmatrix} z^2 - \sqrt{2z}\cos\varphi \\ 0 \\ z - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2z}\cos\varphi \\ -\sqrt{2z}\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} dz \, d\varphi$$

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{bmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_2 \\ \partial x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^2 - x_1 \\ 0 \\ x_3 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2z\cos^2\varphi - z^2\sqrt{2z}\,\underbrace{\cos\varphi}_{0} + z - 3 \, dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\varphi}_{0}\right) + z - 3 \, dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2z - 3 \, dz\, d\varphi = 2\pi \left[z^2 - 3z \right]_0^2$$

$$= \underline{\underline{-4\pi}}$$